ـــ ترتيب عناصر مصفوفة احادية .

خوارزمية التبادل البسيطة .

a[0]	44	10	10	10	10
a[1]	55	44	12	12	12
a[2]	12	55	44	18	18
a[3]	42	12	55	44	42
a[4]	95	42	18	55	44
a[5]	18	95	42	42	55
a[6]	10	18	95	67	67
a[7]	67	67	67	95	95

```
#include <iostream>
#define n 8
Void main()
{
int a[n], i, j, x;
for (i=0; i<n; ++i)
   cin>>a[i];
for(i=1; i<=n; ++i)
{
for (j=n; j>=i; --j)
if (a[j] < a[j-1])
{
x = a(j-1);  a[j-1] = a[j];  a[j] = x;
}
for (i=0; i<n; ++i)
 cout << a[i];
}
```

ـــ العلاقات العودية

لتكن المتتالية $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$

العلاقة العودية بالتعريف هي معادلة تربط الحد الأخير a_n بحدود تسبقه $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ حيث $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ هي ثوابت معطاة.

- العلاقة العودية الخطية المتجانسة ذات الأمثال k.

لتكن العلاقة العودية

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + a_2 t_{n-2} + \dots + a_k t_{n-k} = 0$$

المعادلة المميزة لها:

$$a_0 r_1^{k} + a_1 r_2^{k-1} + a_2 r_3^{k-2} + \dots + a_{k-1} r_k^{0} = 0$$

حيث $r_1, r_2, \dots, r_k$ هي جذور مختلفة عندئذ الحل العام يعطى بالشكل:

$$t_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n + c_3 r_3^n + \dots + c_k r_k^n$$

حيث $c_1, c_2, \dots, c_k$ ثوابت تحسب من الشروط الابتدائية.

تمرين: أوجد حل العلاقة العودية التالية:

$$t_n - 3t_{n-1} - 4t_{n-2} = 0$$

والشروط الابتدائية:

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 1$$

الشكل العام للمعادلة:

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + a_2 t_{n-2} = 0$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -3, \quad a_2 = -4, \quad k = 2$$

المعادلة المميزة لها:

$$a_0 r^2 + a_1 r^1 + a_2 r^0 = 0$$

$$r^2 - 3r - 4 = 0 \Rightarrow (r-4)(r+1) = 0$$

$$r = -1 \quad \text{أو} \quad r = 4$$

الحل العام:

$$t_n = c_1 (4)^n + c_2 (-1)^n$$

$$t_0 = 0 \Rightarrow c_1 (4)^0 + c_2 (-1)^0 = 0$$

$$\boxed{c_1 = -c_2}$$

$$t_1 = 1 \Rightarrow c_1 (4)^1 + c_2 (-1)^1 = 1 \Rightarrow$$

$$-4c_2 + 4c_1 = 1 \Rightarrow -4c_2 - c_2 = 1$$

$$-5c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{5}$$

$$t_n = \left(\frac{1}{5}\right)(4)^n + \left(-\frac{1}{5}\right)(-1)^n$$

ملاحظة:
يمكن لأحد الجذور في العلاقة أن يكون متكرراً عندئذ عن اجل إيجاد المعادلة ~~المميزة~~ المميزة
اذا كان الجذر مكرر مرة واحدة

$$c_1 r^n + c_2 n r^n$$

الجذر مكرر مرتين :

$c_1 r^n + c_2 n r^n + c_3 n^2 r^n$

الجذر مكرر ثلاث مرات

$c_1 r^n + c_2 n r^n + c_3 n^2 r^n + c_4 n^3 r^n$

تمرين : اوجد حل العلاقة العودية التالية :

$$t_n - 7t_{n-1} + 15t_{n-2} - 9t_{n-3} = 0$$

شروط ابتدائية :

$t_0 = 0 \quad , \quad t_1 = 1 \quad , \quad t_2 = 2$

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + a_2 t_{n-2} + a_3 t_{n-3} = 0$$

$a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = -7 \quad , \quad a_2 = 15 \quad , \quad a_3 = -9 \quad , \quad k = 3$

المعادلة المميزة

$$a_0 r^3 + a_1 r^2 + a_2 r + a_3 = 0$$

$$r^3 - 7r^2 + 15r - 9 = 0$$

$$(r-1)(r-3)^2 = 0$$

$r = 1 \quad$ و $\quad r = 3$ مكرر مرتين

$$t_n = c_1 (1)^n + c_2 (3)^n + c_3 (n)(3)^n$$

$$t_0 = 0 \Rightarrow c_1 (1)^0 + c_2 (3)^0 + c_3 (0)(3)^0 = 0$$

$$\boxed{c_1 = -c_2}$$

$$t_1 = 1 \Rightarrow c_1 (1)^1 + c_2 (3)^1 + c_3 (1)(3)^1 = 1$$

$$-c_2 + 3c_2 + 3c_3 = 1$$

$$3c_3 = 1 - 2c_2 \Rightarrow c_3 = \frac{1}{3}(1 - 2c_2)$$

$$t_2 = 2 \Rightarrow c_1(1)^2 + c_2(3)^2 + c_3(2)(3)^2 = 2$$

$$-c_2 + 9c_2 + 18c_3 = 2$$

$$8c_2 + 18 \times \frac{1}{3}(1 - 2c_2) = 2$$

$$8c_2 + 6 - 12c_2 = 2$$

$$-4c_2 = -4 \Rightarrow c_2 = 1$$

$$c_1 = -1$$

$$c_3 = \frac{1}{3}(1-2) \Rightarrow c_3 = -\frac{1}{3}$$

$$t_n = (-1)(1)^n + (1)(3)^n - \frac{1}{3}(n)(3)^n$$

$$= -1 + 3^n - n\,3^{n-1}$$

العلاقة العودية الخطية الغير المتجانسة

لتكن العلاقة العودية :

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + a_2 t_{n-2} + \cdots + a_k t_{n-k} = f(n)$$

حيث $f(n) \neq 0$

سوف نتعامل مع العلاقات غير المتجانسة من الشكل :

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = b^n p(n)$$

حيث b ثابت ، اما $p(n)$ كثيرة حدود من الدرجة (n)

المعادلة المميزة للجزء المتجانس :

$$a_0 r_1^k + a_1 r_2^{k-1} + \cdots + a_{k-1} r_k^0 = 0$$

المعادلة المميزة للجزء غير المتجانس :

$$(r-b)^{d+1}$$

حيث d درجة كثيرة الحدود و b ثابت معطى ،
وبالتالي المعادلة المميزة تتكون من جزئين :

١- المعادلة المميزة المعرفة للعلاقة المتجانسة (الجزء المتجانس) .
٢- ~~ـــــ~~ هذا نتيجة الجزء غير المتجانس .
وبالتالي تكون المعادلة المتجانسة (المعادلة المميزة) :

$$a_0 r_1^k + a_1 r_1^{k-1} + \cdots + a_{k-1} r_k^0 \cdot (r-b)^{d+1} = 0$$

تمرين : أوجد حل العلاقة العودية التالية :

$$t_n - 4t_{n-1} = 2^n(3n^1+2)$$

وبشروط الابتدائية ،

$$t_0 = 0 ,\ t_1 = 14$$

$$a_0 = 1 ,\ a_1 = -4 ,\ k = 1 ,\ b = 2 ,\ d = 1$$

المعادلة المميزة للجزء المتجانس .

$$a_0 r^1 + a_1 r^0 = 0$$

$$r - 4 = 0 \Rightarrow r = 4$$

الحل غير المتجانس :

$$(r-b)^{d+1} = (r-2)^{1+1} = (r-2)^2$$

وبالتالي المعادلة المميزة :

$(r-4)(r-2)^2=0$

$r=4$

$r=2$ جذر مكرر مرتين

الحل العام :

$t_n = c_1(4)^n + c_2(2)^n + c_3(n)(2)^n$

حيث الثوابت : c_1 , c_2 , c_3 تحسب من شروط البدء

يمكن حسابه من المعادلة الاساسية حساب الثابت t_2 وذلك

بتعويض كل n ب 2 اي ان :

$t_n = 4t_{n-1} + 2^n(3n+2)$

نعوض كل n ب 2

$t_2 = 4t_1 + 2^2(3(2)+2)$

$t_2 = 4\times14 + 4(8) = 56+32 = 88$

$t_0=0 \Rightarrow c_1(4)^0 + c_2(2)^0 + c_3(0)(2)^0 = 0$

$\boxed{c_1=-c_2}$

$t_1=14 \Rightarrow c_1(4)^1 + c_2(2)^1 + c_3(1)(2)^1 = 14$

$-4c_2 + 2c_2 + 2c_3 = 14$

$-2c_2 + 2c_3 = 14 \Rightarrow c_3 = 7 + c_2$

$t_2 = 88 \Rightarrow c_1(4)^2 + c_2(2)^2 + c_3(2)(2)^2 = 88$

$-16c_2 + 4c_2 + 8c_3 = 88$

$c_2 = -8 \Rightarrow c_1 = 8 \Rightarrow c_3 = -1$

الحل العام :

$$t_n = (8)(4)^n + (-8)(2)^n + (-1)(n)(2)^n$$

انتهت المحاضرة